Université Hassan II – Aïn Chock
Faculté des Sciences Juridiques,
Économiques et Sociales
Casablanca

Filière : S. E. G
Algèbre mathématique I
Série 2

Année universitaire 2019/20
Semestre : S2

Exercice 1

Soit f la fonction de R^4 dans R^4 définie par :

$f(x ; y ; z ; t) = (x + y + z + t ; x + y + z + t ; x + y + z + t ; 2x + 2y + 2z + 2t)$

1. Montrer que f est linéaire et déterminer la matrice associé à cette application dans la base canonique de R^4.
2. Vérifier que les vecteurs $a = (1 ; -1 ; 0 ; 0)$, $b = (0 ; 1 ; -1 ; 0)$ et $c = (0 ; 0 ; 1 ; -1)$ appartiennent à *kerf.*
3. Vérifier que le vecteur $d = (5 ; 5 ; 5 ; 10)$ appartient à *Imf*.

Exercice 2

Soit l'application f : R^3 dans R^3 donnée par :

$f(x ; y ; z) = (x + 2y + z ; 2x + y + 3z ; -x - y - z)$

1. Justifier que f est linéaire.
2. Donner la matrice de A dans la base canonique de R^3.
3.
   a) Déterminer une base et la dimension du noyau de f, noté *kerf*.
   b) L'application f est-elle injective ?
4.
   a) Donner le rang de f et une base de *Imf*.
   b) L'application f est-elle surjective ?

Exercice 3

Soit f l'application linéaire de R^4 dans lui-même définie par

$f(x, y, z, t) = (x - y + z ; y + z + t ; 0, x + y + 3z + 2t)$.

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de R^4.
2. Ecrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire la dimension de *Imf* et une base de *Imf*.
5. Quelle est la dimension du noyau de f ? Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de *Kerf*.

Exercice 4

On considère l'application linéaire f de R^3 dans R^4 définie par :

$f(x, y, z) = (x + z ; y - x ; z + y ; x + y + 2z)$.

1. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de R^3. En déduire une base de *Imf*.
2. Déterminer une base de $Ker(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 5

On considère l'endomorphisme f de R^3 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Donner une base de *Kerf* et de *Imf*

Exercice 6

Reprendre l'exercice précédent dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Pr. M. ABID